Лекция 1.

Матрицы и операции над ними

Определение. **Матрицей** наз. прямоугольная таблица чисел.

Примеры: , .

Существуют понятия **строки** матрицы, **столбца** матрицы.

Количество строк и столбцов матрицы наз. её **размерами.** Говорят, что матрица имеет размеры m x n, если она имеет m строк и n столбцов. В зависимости от размеров, матрицы бывают квадратными, прямоугольными, матрица-строка, матрица-столбец, одно число можно представлять как матрицу размера 1 х 1.

Обозначаются матрицы обычно большими буквами А, В, С и т.д. Числа, из которых составлена матрица, наз. её **элементами.**

Элементы матриц обозначаются малыми буквами, иногда с индексами, указывающими номер строки и номер столбца. Используются обозначения ,

или А = ||аij||, i = 1, …, m; j = 1, …, n.

Матрицы возникают при решении различных задач. Например, при решении систем линейных уравнений. Предположим, что требуется решить систему уравнений:



Этой системе уравнений соответствуют сразу 4 матрицы:

- **матрица коэффициентов** системы.

- **расширенная матрица системы**.

 - **столбец неизвестных.**

- **столбец свободных членов**.

(В дальнейшем при рассмотрении систем линейных уравнений будем пользоваться этими терминами).

В зависимости от значений элементов, выделяют следующие матрицы:

1.  - **нулевая** матрица (все элементы = 0)
2. - **единичная** матрица, квадратная матрица с единицами по главной диагонали, остальные элементы = 0. Обычно обозначается Е.
3. **Верхнетреугольная и нижнетреугольная** матрицы вида

 и - все элементы ниже или соответст-венно выше главной диагонали = 0, \* - означает число, которой может быть ≠ 0 ( хотя может быть и = 0 ).

1. Симметрические матрицы – квадратные матрицы, для которых элементы, симметричные относительно главной диагонали, равны, т.е. aij = aji для всех номеров строк i и номеров столбцов j.

Для симметрической матрицы элементы строки и элементы столбца одни и те же и записаны в том же порядке, если совпадают номера строки и столбца.

Пример:  - симметрическая матрица.

Алгебраические операции над матрицами

Такими операциями считаются следующие 3 операции:

1. Сложение матриц
2. Умножение матрицы на число
3. Умножение матрицы на матрицу

Первые две операции настолько просты, что мы не будем

формулировать определений, а рассмотрим сразу примеры, из которых сразу будет ясно, как выполняются эти действия.

Примеры:

1.  ( размеры всех матриц должны быть одинаковы, складываются соответствующие элементы матриц)
2.  ( все элементы матрицы умно-жаются на данное число)

Отметим свойства этих операций, вытекающие из определе-ния:

А + В = В + А

а∙(А + В) = а∙А + а∙В

(а + b)∙A = a∙A + b∙A

( Для любых матриц А, В и чисел a, b). (Заметим, что операция вычитания матриц получается как комбинация из этих двух, т.е. второе слагаемое умножается сначала на –1 и затем складывается с первым).

Теперь разберёмся с более сложной операцией – умножением матрицы на матрицу. Чтобы общее определение было более ясным и простым, сначала определим умножение матрицы-строки на матрицу-столбец того же размера. Итак, по определению:



Например, 

Теперь рассмотрим общий случай. Пусть даны 2 матрицы:

 , ,

A – размера m x n , В – размера n x k. Тогда произведение этих матриц С = А∙В имеет размер m x k,

, cij  = произведению –ой строки матрицы А на –й столбец матрицы В ( как умножать строку на столбец у нас уже определено, чтобы их длины совпадали, в определении указывается, что число столбцов первой матрицы равно числу строк второй ).

Примеры

1. 
2. 
3. , и наоборот,
4. 

Свойства операции умножения матриц

1. А∙В ≠ В∙А в общем случае, это видно из примеров 3), 4).
2. А∙(В + С) = А∙В + А∙С, (В + С)∙А = В ∙ А + С ∙ А (доказывается несложно, опускаем)
3. А∙(В ∙ С) = (А∙В)∙С (доказательство можно провести непосредственно, установив, что размеры матриц в обеих частях равенства одинаковы, и что соответствующие элементы также одинаковы)

Сформулированное определение может показаться надуманным, искусственно созданной конструкцией. Чтобы этого не случилось, проясним «происхождение» этой операции и заодно станет очевидным и последнее свойство.

Предположим, что происходит переход от переменных (х, у) к переменным , и далее, от  к  по формулам

 ; ,

т.е. , .

Тогда переход от (х, у) к  будет происходить по формулам

 И вот тут мы замечаем, что этот переход произошёл согласно определению произведения матриц, т.е.

.

Лекция 2.

Определение. Матрица В наз. транспонированной к А и обозначается В = Аt, если строки матрицы В являются столбцами матрицы А с теми же номерами (а столбцы В – строками А).

Пример: .

Для симметрической матрицы, по определению, Аt = A.

Лемма о транспонировании произведения матриц.

Для любых матриц А и В, для которых определено произведение А∙В, верно равенство (А∙В)t = Вt ∙At.

Доказ-во. Рассмотрим элемент сi j в левой и правой частях равенства и обнаруживаем, что это одно и то же. Действительно, слева это произведение j – ой строки матрицы А на i – й столбец матрицы В, справа это произведение i – го столбца В на j – ю строку А (разумеется при умножении столбец расположен строкой, а строка столбцом).

Очевидно, лемма распространяется на любое число множителей и имеет место общее равенство (А1∙А2∙А3∙∙∙Аn)t = Ant ∙∙∙A3t ∙A2t∙A1t.

§ 2 Определители

Определитель это некоторое число, которое вычисляется для данной квадратной матрицы. Для неквадратных матриц определитель не вычисляется (т.е. не существует). А теперь дадим определение определителя. Пусть дана квадратная матрица общего вида размера n x n:

.

Определитель матрицы А обозначают как det(A) или |A|.

В учебной литературе используют два различных определения: индуктивное («разложением по первой строке») и классическое («через подстановки»). Дадим оба эти определения( разумеется, доказано, что они эквивалентны). Итак,

Определение 1 (индуктивное).

По предположению индукции считаем, что нам известно как находится определитель любой матрицы размера ( n - 1) x (n - 1).

Основанием индукции считаем правило нахождения определителя матрицы размера 1 х 1, т.е. состоящей из одного числа а. Это правило гласит det(a) = a.

Определителем матрицы А наз. число, которое вычисляется по формуле det(A) = a11∙M11 – a12 ∙M12 + a13 ∙M13 - …+ (-1)n-1 ∙a1n ∙M1n ,

где М1i – определитель матрицы, полученной из матрицы А вычёркиванием первой строки и i – го столбца.

В этой формуле записаны определители М1i (**миноры**), размер которых равен (n - 1) x ( n - 1). По предположению индукции нам известно, как они вычисляются.

Замечание. То, что в формуле используется первая строка, несущественно. Если записать такую же формулу для любой другой строки или любого столбца, то получится то же число, только в случае чётного номера строки или столбца с обратным знаком. Это всё доказано в теории определителей.

Теперь выведем конкретные выражения для определителей матриц размеров 2 х 2 и 3 х 3.





 После раскрытия скобок получается сумма 6 слагаемых, 3 из которых положительны и 3 отрицательны. Для запоминания используется “правило треугольников”:

+ -

 

Примеры:

1. 
2. 

Определение 2 (через подстановки)

Вначале введём понятия: **подстановка, инверсия, чётность подстановки.**

**Подстановкой** порядка n наз. запись пары строк чисел вида , где в нижней строке записаны те же числа, что и в верхней, но переставлены местами. Например, перестановки порядка 4:

, ,  и т.д.

Количество всех подстановок порядка n равно n! = n∙(n-1)∙(n-2)∙∙∙2∙1.

Пара чисел из подстановки (i, j) образует **инверсию**, если i < j , но αi > αj. Для каждой подстановки можно вычислить число всех возможных инверсий. Например, для первой подстановки из приведённого примера инверсии образуют пары (1,2), (1,4), (3,4) – всего 3 инверсии. Число инверсий для данной подстановки может быть чётным и нечётным. Подстановки с чётным числом инверсий наз. **чётными**, с нечётным – **нечётными**.

Теперь даём классическое определение определителя:

det(A) = , где S – множество всех подстановок вида π = ,

γ(π) = .

Замечания. Классическое определение очень неудобно при вычислениях, так как требуется перебирать все подстановки и вычислять их чётность, но оно удобно при доказательствах свойств определителей. Напротив, индуктивное определение удобно при вычислениях, но неудобно при доказательствах. Так как мы не предполагаем проводить доказательств, то будем далее пользоваться индуктивным определением.

Свойства определителя

(Сформулируем свойства без доказательства. Доказательства хотя и несложны, требуют времени. Доказательства, опирающиеся на классическое определение, можно найти в учебнике «Ильин, Поздняк, Линейная алгебра». )

1. Если какая-либо строка (или столбец) матрицы состоит из одних нулей, то определитель равен нулю.
2. Если две строки (или два столбца) матрицы одинаковы, то определитель равен нулю.
3. Если какую-либо строку (или столбец) матрицы умножить на некоторое число, то и определитель умножится на это число ( если всю матрицу умножить на число k, то определитель умножится на kn, где n – число строк матрицы).
4. Если переставить местами две строки (или два столбца), то определитель изменит знак на противоположный.
5. Если к какой-либо строке (или столбцу) прибавить (или отнять) другую строку (или столбец), умноженную на некоторое число, то определитель не изменится.
6. det(A) = det(At).
7. det(A∙B) = det(A)∙det(B).

Это свойство можно проверить экспериментально:

, ,, |А| = 14, |В| = -11,

|А∙В| = -64 - 90 = -154. Проверяем: -154 = 14∙(-11). Верно.

1. Определитель можно раскладывать по любой строке (или столбцу) аналогично тому, как написано в формуле индуктивного определения

det(A) = ai1∙Ai1 + ai2 ∙Ai2 + ai3 ∙Ai3 + …+ ain ∙Ain ,

где Aij = (-1) i+j ∙Mij, Mij – определитель матрицы, полученной

из А вычёркиванием i-oй строки и j-го столбца.

Заметим для дальнейшего, что Аij наз. **алгебраическими дополнениями** элементов аij , Mij – **дополняющими минорами** элементов аij.

Лекция 3.

Системы линейных уравнений. Основные понятия.

Формулы Крамера

Система m линейных уравнений с n неизвестными x1, x2, …,xn имеет вид



Если записать матрицы , , , то система записывается в виде матричного равенства

А∙Х = В.

**Определения**.

Система наз. **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, **несовместной** – если не имеет решений.

Если система имеет только одно решение, то она наз. **опре-делённой**, если имеет более одного решения, то наз. **неопреде-лённой**.

Если столбец свободных членов состоит из одних нулей, то система наз. **однородной**, в противном случае **неоднородной**.

Однородная система всегда совместна, так как она имеет решение х1 = 0, х2 = 0, …, хn = 0.

Две системы с одними и теми же неизвестными наз. **эквивалентными**, если всякое решение одной системы является решением другой системы (или же они обе несовместны).

Формулы Крамера (без вывода)

Если m = n и система имеет единственное решение, то его можно найти по формулам:



где Δ – определитель матрицы А, Δi – определители матриц, полученных из А заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Из формул Крамера вытекает (Δ стоит в знаменателе) важное **замечание:** Если система имеет единственное решение, то определитель Δ = det(A) ≠ 0. Обратно, если m = n и система неопределённая или несовместная, то это значит, что Δ = det(A) = 0, а в случае неопределённой системы ещё и Δi = 0 для всех i.

Понятие обратной матрицы

Определение. **Единичной** матрицей размера n x n наз. матрица вида  .

Единичная матрица ( как и число 1) обладает (легко проверить, начиная умножать) свойствами X∙E = X, E∙X = X для любой другой матрицы X.

Определение. Если для двух квадратных матриц А и В выпол-нено равенство АВ = Е, то В наз. **обратной** к А и обозначается

В = А-1.

Замечание. В данном определении следовало бы говорить о матрице В, как обратной к А “справа”, так как умножение матриц не перестановочно. Но оказывается, что обратная справа и обрат-ная слева совпадают. Докажем это чуть позже.

Теорема. Если  , det(A) ≠ 0, то существует и единственная матрица А-1 такая, что А∙А-1 = А-1∙А = Е, и А-1 находится по формуле:

* ,*

*где - алгебраические дополнения элементов  матрицы* А.

( Напоминаем, что Аij = (-1)i+j ∙Mij – алгебраические дополнения, см. прошлую лекцию).

Док-во. Проверим равенство А∙А-1 = Е. Действительно, при умножении i – oй строки матрицы А на i – й столбец матрицы А-1 получается сумма ai1∙Ai1 + ai2 ∙Ai2 + ai3 ∙Ai3 + …+ ain ∙Ain , которая равна det(A), и потом делится на det(A), т.е. получается 1 на диагонали. При умножении i – oй строки матрицы А на j – й столбец матрицы А-1 при i ≠ j получается сумма ai1∙Aj1 + ai2 ∙Aj2 + ai3 ∙Aj3 + …+ ain ∙Ajn , которая равна det(A\*), где А\* - матрица, полученная из А заменой j – oй строки на i – ю, т.е. в матрице А\* получаются две одинаковых строки i –я и j – я, а значит её определитель равен нулю. Таким образом, в произведении получается матрица с единицами по главной диагонали и с нулями вне диагонали, т.е. матрица Е, ч.т.д.

Точно так же проверяется, что А-1∙А = Е. Покажем единственность обратной матрицы. Предположим, что кроме А-1, взятой по формуле, для той же матрицы А имеется ещё одна обратная В. Тогда АВ = Е. Умножим это равенство слева на А-1 и получим

А-1∙ (А∙В) = А-1∙Е

(А-1∙ А)∙В = А-1

Е∙ В = А-1

В = А-1

( на 1- м шаге нам помог закон ассоциативности умножения матриц !). Теорема доказана.

Матричный метод решения систем линейных уравнений.

Если система записана в виде А∙Х = В, А – квадратная матрица, det(A) ≠ 0, то А-1 ∙ А∙X = А-1 ∙ В и Х = А-1 ∙ В. Значит, чтобы найти столбец неизвестных Х, можно сначала найти А-1, затем А-1 умножить на столбец свободных членов.

Пример 1. ( Подобное задание есть в модуле 1). Решить систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными по формулам Крамера и матричным методом:



Составим главный определитель системы и вычислим его по правилу треугольников

.

Определитель Δ ≠ 0, следовательно, система имеет единственное решение. Вычислим теперь три вспомогательных определителя . Для вычисления заменим 1-й столбец в главном определителе на столбец свободных членов системы, остальные два столбца оставим без изменения



Аналогично вычислим два других определителя

;

.

Находим значения неизвестных:

х = , у =, z = .

Теперь эту же систему решаем матричным методом. Запишем уравнение в матричном виде:

.

Находим обратную матрицу по формуле

.

Находим алгебраические дополнения по формуле Аij = (-1)i+j ∙Mij:

, ,

, ,

, ,

, ,

. Подставляем полученные значения в выражение для обратной матрицы:

=

= .

Находим значения неизвестных, т.е. матрицу-столбец неизвестных:

.

Получился тот же ответ x = 1, y = 2, z = 1. ( При решении таких задач нужно делать проверки: сначала проверить, что обратная матрица найдена верно, для этого умножить А∙А-1, должна получиться единичная матрица, затем проверить подстановкой в исходную систему значения неизвестных).

Лекция 4.

Сначала рассмотрим ещё один пример задачи, подобной заданию из модуля 1, на применение обратной матрицы. Для нахождения обратной матрицы размера 2 х 2 полезно запомнить простую формулу, которая легко запоминается. Эта формула получается применением общей формулы обратной матрицы.

, Δ = ad – bc ( определитель ).

Пример 2. Решить матричное уравнение

.

Умножаем это равенство слева на и справа на .

Тогда матрицы, стоящие слева и справа от Х сокращаются и остаётся равенство X = .

Теперь находим обратные матрицы, подставляя в общую формулу .

=.

= .

Теперь находим неизвестную матрицу Х:

Х = 

= .

Получился ответ Х = . Его нужно проверить подстановкой в первоначальное матричное уравнение. Подставляем: . Проверяем:

,

.

# Элементарные преобразования над матрицей

К числу **элементарных преобразований** относят следующие:

1. Перестановка строк или столбцов матрицы.
2. Умножение строки или столбца на некоторое число ≠ 0.
3. Прибавление к одной строке (или столбцу) другой строки (или столбца), умноженной на некоторое число.

Можно говорить отдельно об элементарных преобразованиях строк и отдельно об элементарных преобразованиях столбцов.

Элементарные преобразования играют фундаментальную роль в линейной алгебре. На их применении основан метод Гаусса, который позволяет наиболее экономно решать системы линейных уравнений, исследовать системы на совместность и определённость, находить обратную матрицу, вычислять определитель и т.д.

Метод Гаусса. Решение систем линейных уравнений.

Пусть имеется система линейных уравнений общего вида:



Метод Гаусса основан на следующих свойствах элементарных преобразований системы уравнений, которым соответствуют элементарные преобразования расширенной матрицы системы.

Предложение 1. Система остаётся эквивалентной при следующих преобразованиях:

1. Перестановка уравнений (перестановка строк матрицы).
2. Умножение уравнения на любое число ≠ 0 ( умножение строки на число ≠ 0).
3. Перенумерация неизвестных (перестановка столбцов, исключая столбец свободных членов).
4. Прибавление к одному уравнению другого уравнения, умноженного на некоторое число (прибавление к одной строке другой строки, умноженной на некоторое число).

Док-во. Пункты 1, 2, 3 очевидны и не требуют доказательства.

Докажем только пункт 4. Сделаем такое преобразование и покажем, что всякое решение старой системы будет решением новой системы и обратно. Пусть для определённости к 1-ому уравнению прибавлено 2-ое уравнение, умноженное на число р.

Тогда первое уравнение новой системы имеет вид:

(a11x1 + …+ a1nxn) + p(a21x1 + …+ a2nxn) = b1 + p∙b2 или

(a11 + р∙a21)∙х1 + … + (a1n + р∙a2n)∙xn = b1 + p∙b2.

Пусть теперь (х10, … , хn0) – решение старой системы. Тогда оно сразу удовлетворяет всем уравнениям новой системы, начиная со 2 – го. Проверим, что оно удовлетворяет и первому. Подставляем в новое первое:

(a11x10 + …+ a1nxn0) + p(a21x10 + …+ a2nxn0) = b1 + p∙b2 , так как

(a11x10 + …+ a1nxn0) = b1, a21x10 + …+ a2nxn0 = b2. Таким образом, любое решение старой системы является решением и новой системы. Доказано утверждение в одну сторону. Требуется ещё показать, что всякое решение новой системы является решением и старой системы. Мы этого проверять не будем, а заметим, что старая система может быть получена из новой таким же преобразованием, но при другом значении р. Действительно, старая система отличается от новой только первым уравнением, первое уравнение старой системы получается из 1 – го и 2 – го уравнений новой системы следующим образом:

(a11x1 + …+ a1nxn) + p(a21x1 + …+ a2nxn) = b1 + p∙b2

+

(- p)∙(a21x1 + …+ a2nxn = b2)

a11x1 + …+ a1nxn = b1

Предложение доказано.

Переходим к изложению метода Гаусса. Пусть дана система общего вида и найдено единственное решение. Рассмотрим, что это означает на языке матриц. Расширенная матрица системы имела вид: , ответ имеет вид: .

Сам ответ тоже является системой (уже сразу решённой). Запишем эту систему и её матрицу (матрицу ответа):

 .

Теперь можно сформулировать **метод Гаусса**:

Метод Гаусса заключается в том, чтобы, используя перечисленные в предложении 1 преобразования расширенной матрицы системы, довести эту матрицу до матрицы ответа. При этом, как показано в предложении 1, система остаётся эквивалентной исходной при каждом преобразовании и поэтому ответ эквивалентен самой системе и не будет ни потеряно ни одного решения, ни приобретено ни одного постороннего решения.

Теперь встаёт вопрос как нужно делать эл. преобразования матрицы, чтобы придти к ответу? Существует вполне определённый порядок (алгоритм), который позволяет это сделать.

Алгоритм метода Гаусса (схема единственного деления)

(Не записывать! *Помимо схемы единственного деления используются и другие схемы, например, схема с выбором главного элемента по всей матрице и др. Это делается с целью достижения большей точности при вычислениях. Так как нас пока интересует только теоретическая сторона вопроса, мы не будем разбирать эти схемы. И кроме того, если уж на то пошло, то в действительности при решении систем на ЭВМ используется не метод Гаусса, а «метод квадратного корня», который хотя и сложен для нас сейчас, но он позволяет достигать большей точности, чем метод Гаусса. Кстати, методом квадратного корня решаются и другие задачи: нахождение обратной матрицы, вычисление определителей и др. )*

Алгоритм заключается в следующем:

Строго по порядку начиная с первого и до тех пор, пока это возможно обрабатываются столбцы матрицы и приводятся к требуемому виду. Требуемый вид – соответствующий номеру и размеру столбец единичной матрицы (такова матрица ответа).

Обработка столбца делается строго по порядку: сначала получают единицу, а затем получают нули.

1. **Получение единицы в обрабатываемом столбце**.
2. На этом месте стоит число ≠ 0. Тогда нужно всю эту

строку разделить на это число.

1. На этом месте стоит 0. Тогда нужно посмотреть, есть ли числа ≠ 0 в строках ниже данной и в столбцах, кроме последнего. Если таких чисел нет – процесс закончен. Если есть – сделать перестановку строк и столбцов так, чтобы это число оказалось на месте, где нам нужно иметь 1. Затем выполнить пункт а).
2. **Получение нулей в обрабатываемом столбце**.

Из всех строк поочерёдно отнять строку, в которой стоит

полученная на предыдущем шаге единица, умноженную

на то число данного столбца, вместо которого нужно

получить 0.

Пример 3 (такая задача есть в модуле 1). Решить методом Гаусса систему:

.



.

Получилось решение .

Исследование систем

на совместность и определённость методом Гаусса

Предположим, что мы не знаем, имеет ли система решения или нет, а если имеет, то одно или же их много, и предположим в общем случае, что число уравнений может быть больше числа неизвестных, а может быть и меньше. Но зато мы точно знаем, что при проведении преобразований матрицы системы, указанных в предложении 1, система остаётся эквивалентной исходной. Т.е. если эта система была определённой, то она определённой и останется, если была несовместной, останется несовместной, была неопределённой – останется неопределённой. Всё это доказано в предложении 1. Тогда проведём обработку столбцов расширенной матрицы системы по алгоритму схемы единственного деления и получим в конце матрицу общего стандартного вида:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | а1, r+1 … a1, n  \*  a r, r+1 … a r, n | b1  b2  br |
| 0 0 … 0  …………...  0 0 … 0 | 1. … 0   … .…  0 … 0 | br+1  …  bm |

Полученная матрица соответствует системе уравнений. Поэтому можно по виду этой матрицы сделать выводы:

1. Если хотя бы одно из чисел br+1, … ,bm не равно 0, то система несовместна, так как левые части соответствующих уравнений равны нулю. ( Например, при bi = 2 такое уравнение будет иметь вид 0∙ х1 + 0∙ х2 + … + 0∙хn = 2, т.е. 0 = 2).
2. Если все числа br+1, … ,bm = 0 или их просто нет (если r = n) и матрица (\*) отсутствует, то система имеет единственное решение, записанное в столбце свободных членов.
3. Если все числа br+1, … ,bm = 0 или их нет, а матрица (\*) имеется, то система неопределённая, т.е. имеет много решений. Разберёмся далее подробно с этим случаем и выясним, что получается. Запишем соответствующую систему:

.

Неизвестные х1, х2, … , хr – наз. **базисными**. Остальные неизвестные хr+1, хr+2, … , хn – наз. **свободными**. Число r наз. **рангом системы.** Далее, перенесём свободные неизвестные в правую часть равенств: 

Теперь видно, что если в качестве свободных неизвестных взять любые числа ( поэтому они и наз. «свободными»), то значения для главных неизвестных находятся по данным формулам, и так как равенства будут выполнены, то полученная совокупность и будет решением. Так же ясно, что всякое решение получается таким образом.

Иногда свободные неизвестные обозначают другими буквами и наывают их параметрами, а последние формулы называют общим решением системы. Т.е. общее решение записывается в виде:





Пример Исследовать систему:



Составляем расширенную матрицу и обрабатываем её методом Гаусса:



.

По полученной матрице делаем заключение:

Система совместная, так как свободные члены в последних двух строках равны 0.

Система неопределённая, так как есть матрица .

Главные неизвестные x, y.

Cвободная неизвестная z.

Ранг системы r = 2.

Ответ можно записать в виде  или в виде

.